Παρασκευή 30/10/20

Άσκηση 1

Σε ένα πρόβλημα στατιστικών αποφάσεων έστω $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, $D = \{a_1, a_2, a_3\}$ με συνάρτηση ζημιάς $L(\theta, d)$:

	a_1	a_2	a_3
θ_1	0	4	5
θ_2	2	3	0
θ_3	6	0	6

και κατανομή της τ.μ. X $P(X=x)$:

	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	0,3	0,5	0,2
x_2	0,7	0,5	0,8

Να βρεθούν οι συναρτήσεις κινδύνου για κάθε θ στο Θ και να βρεθεί η καλύτερη απόφαση.

Λύση:

$R(\theta, d) = E\{L(\theta, d(X))\}$

Σύνολο δυνατών αποφάσεων

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
X_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_2	a_3	a_3	a_3
X_2	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3

27 συνδυασμοί

$R(\theta_1, d_1) = \sum_x L(\theta_1, d_1(x)) \cdot P(X = x | \theta = \theta_1) =$

$= L(\theta_1, a_1) \cdot P(X = X_1 | \theta = \theta_1) + L(\theta_1, a_1) P(X = X_2 | \theta = \theta_1) = 0$

$R(\theta_1, d_2) = L(\theta_1, a_1) P(X = X_1 | \theta_1) + L(\theta_1, a_2) P(X = X_2 | \theta_1) =$
$= 4 \cdot 0{,}7 = 2{,}8$

όμοια $R(\theta_1, d_3) = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$

$R(\theta_1, d_4) = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2$

$R(\theta_1, d_5) = 4 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}7 = 4$

$R(\theta_1, d_6) = 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}7 = 4{,}7$

$R(\theta_1, d_7) = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$

$R(\theta_1, d_8) = 5 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}7 = 4{,}3$

$R(\theta_1, d_9) = 5 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}7 = 5$

$R(\theta_2, d_1) = 2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 = 2$

$R(\theta_2, d_2) = 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$

$R(\theta_2, d_3) = 2 \cdot 0{,}5 + 0 = 1$

$R(\theta_2, d_4) = 3 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$

$R(\theta_2, d_5) = 3 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 = 3$

$R(\theta_2, d_6) = 3 \cdot 0{,}5 + 0 = 1{,}5$

$R(\theta_2, d_7) = 0 + 2 \cdot 0{,}5 = 1$

$R(\theta_2, d_8) = 0 + 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$

$R(\theta_2, d_9) = 0 + 0 = 0$

$R(\Theta_3, d_1) = 6 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,8 = 6$

$R(\Theta_3, d_2) = 6 \cdot 0,2 + 0 = 1,2$

$R(\Theta_3, d_3) = 6 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,8 = 6$

$R(\Theta_3, d_4) = 0 + 6 \cdot 0,8 = 4,8$

$R(\Theta_3, d_5) = 0 + 0 = 0$

$R(\Theta_3, d_6) = 0 + 6 \cdot 0,8 = 4,8$

$R(\Theta_3, d_7) = 6 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,8 = 6$

$R(\Theta_3, d_8) = 6 \cdot 0,2 + 0 = 1,2$

$R(\Theta_3, d_9) = 6 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,8 = 6$

Για να αποφανθούμε για την καλύτερη απόφαση βρίσκουμε την μικρότερη συνολική ζημιά.

~~π.χ) για την d_6 προσθέτουμε~~

π.χ) για την d_6 προσθέτουμε όλες τις συναρτήσεις κινδύνου για τα $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ ξεχωριστά και το μικρότερο άθροισμα αντιστοιχεί στην καλύτερη απόφαση.

Άσκηση 2η

Το τεστ Pap κάνει σωστή διάγνωση στο 95% των περιπτώσεων, δηλ. είναι θετικό με πιθανότητα 0,95 εάν όντως υπάρχει κακοήθης νεοπλασία και αρνητικό με πιθανότητα 0,95 αν δεν υπάρχει κακοήθης νεοπλασία. Το ποσοστό των γυναικών που πάσχουν από την ασθένεια είναι 12%. Εάν για μια γυναίκα το τεστ είναι θετικό ποια η πιθανότητα η γυναίκα αυτή να πάσχει πράγματι από κακοήθη νεοπλασία

Λύση

Έστω $A = \{$Τεστ Θετικό$\}$

$B_1 = \{$πάσχει από ασθένεια$\}$

$B_2 = \{$δεν πάσχει από ασθένεια$\}$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2)}$$

$$= \frac{0{,}95\cdot 0{,}12}{0{,}95\cdot 0{,}12 + 0{,}05\cdot 0{,}88} = \frac{0{,}114}{0{,}272}.$$

Ασκηση 3:

Έστω $X_1, \dots X_n$ τ.δ από την $N(\mu, 1)$

i) $R(\mu, \bar{X}) = ;$ συναρτ. απωλ. το τετρ. σφάλμα

ii) αν $X_1, \dots X_{2n}$ τδ από $N(\mu, 1)$

αν $T = \frac{1}{n}\Sigma X_i$ και $Y = \frac{1}{2n}\Sigma X_i$ ποιος είναι παραδεκτός?

i) Από γνωστή πρόταση

$$R(\mu, \bar{X}) = Var\bar{X} + E(\bar{X}-\mu)^2 = \frac{1}{n} + 0 = \frac{1}{n}.$$

ii) $R(\mu, T) = \frac{1}{n}$.

$$R\left(\mu, \frac{1}{2n}\Sigma X_i\right) = R(\mu, Y) = \frac{1}{2n}.$$

$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$ Άρα ο Y είναι παραδεκτός.